4. **Con parámetro:** escribe la condición entrada por entrada (por ejemplo $m_{ij} = -\overline{m_{ji}}$ para antihermitiano) y despeja. Revisa también la diagonal: en un hermitiano es real, en un antihermitiano es imaginaria pura.
5. Concluye con la definición: «T es hermitiano porque $T^* = T$».

5.3.3 Descomposición espectral

1. Comprueba que T sea normal (simétrico, si es real); si no, no hay descomposición espectral.
2. Valores propios y espacios característicos (Unidad 3B).
3. Base ortonormal de cada espacio: normaliza cada vector propio; si el espacio tiene dimensión 2 o más, aplica Gram-Schmidt dentro de él.
4. Proyecciones: $P_i = \sum \hat{e}\,\hat{e}^T$, o en regla $P_i(\vec{v}) = \sum(\vec{v} \mid \hat{e})\hat{e}$.
5. $T = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_k P_k$. Comprueba $P_1 + \cdots + P_k = I$ y que la suma reproduzca M.
6. **Al revés** (se dan los valores y los espacios y se pide la regla): arma las proyecciones con los espacios dados y suma $\lambda_i P_i$.

5.3.4 Cónica sin término mixto

1. Escribe A: los coeficientes de x^2 y y^2 en la diagonal y la **mitad** del coeficiente de xy fuera de ella.
2. Valores propios λ_1, λ_2 y vectores propios unitarios $\hat{e}_1, \hat{e}_2$ (ortogonales, porque A es simétrica).
3. La ecuación sin término mixto es $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = d$, con x' en la dirección de $\hat{e}_1$ y y' en la de $\hat{e}_2$.
4. Divide entre d para la forma canónica y di qué cónica es. Si se pide el giro, $P = [\,\hat{e}_1\ \hat{e}_2\,]$ con $\det P = 1$ es una rotación.

5.4 Ejemplo resuelto

Adaptado de: 1er final 2014-2, tipo A, problema 6.

Sean el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ con producto interno usual y el operador lineal $S:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con regla $S(x, y, z) = (3x - 2y,\ -2x + 3y,\ 8z)$.

- a) Obtenga el adjunto de S.
- b) Determine si S es normal.

Datos. Espacio real con el producto interno usual: la base canónica es ortonormal.
Planteamiento. $M(S^*) = M^T$; S es normal si $MM^T = M^T M$.
Resolución.

1. a) $M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ y $M^T = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = M$.
2. Entonces $S^*(x, y, z) = (3x - 2y,\ -2x + 3y,\ 8z)$: el adjunto es el mismo operador. S es simétrico.
3. b) Como $S^* = S$, $S \circ S^* = S \circ S = S^* \circ S$.
4. **Resultado:** $S^* = S$; S es simétrico y, por lo tanto, normal.

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«una matriz diagonal asociada y la base a la que está referida», «matriz diagonalizadora», «P tal que $P^{-1}MP$ sea diagonal»	D y P	3B.3.4
se dan los valores y vectores propios (o D y los espacios característicos) y se pide la regla o la matriz	$M = PDP^{-1}$	3B.3.5
el operador actúa sobre polinomios o matrices	lo mismo, en coordenadas	3B.3.6

3B.3 Procedimientos

3B.3.1 Valores propios

1. Escribe la matriz M asociada a T. Con la regla $T(x, y, z) = (\dots)$, la columna j de M es la imagen del j-ésimo vector canónico: los coeficientes de x forman la primera columna, los de y la segunda, y así sucesivamente.
2. Forma $M - \lambda I$ (resta λ solo en la diagonal) y calcula su determinante. Si hay un renglón o una columna con ceros, desarrolla por ahí: el polinomio sale ya factorizado.
3. Iguala a cero y resuelve. Para un polinomio de grado 3 sin factor visible, prueba las raíces enteras que dividen al término independiente y usa división sintética.
4. Comprueba: la suma de los valores propios es la traza de M y su producto es $\det M$.

3B.3.2 Espacios característicos

1. Para cada valor propio λ_i, sustituye en $M - \lambda_i I$. Su determinante es cero, así que el sistema $(M - \lambda_i I)\vec{v} = \vec{0}$ tiene infinitas soluciones.
2. Escalona y deja libres tantas variables como renglones nulos queden. El número de parámetros es la multiplicidad geométrica.
3. Escribe $E(\lambda_i) = \{\, \alpha(\dots) \mid \alpha \in \mathbb{R} \,\}$ y da una base. Comprueba con la regla: $T(\vec{v})$ debe dar $\lambda_i \vec{v}$.

3B.3.3 ¿Es diagonalizable?

1. Calcula los valores propios con su multiplicidad algebraica.
2. Si todos son distintos (y reales, en un espacio real), es diagonalizable; termina.
3. Para cada valor repetido λ, calcula $\dim E(\lambda) = n - \text{rango}(M - \lambda I)$ y compárala con la multiplicidad algebraica. Si alguna es menor, no es diagonalizable.
4. **Con parámetro k:** el parámetro casi nunca cambia los valores propios (suele estar fuera de la diagonal en una matriz triangular por bloques). Lo que cambia es el rango de $M - \lambda I$ para el valor repetido. Escoge k para que ese rango baje lo suficiente.

3B.3.4 Matriz diagonal y base a la que está referida

1. Toma un vector de cada base de los espacios característicos (todos los vectores de la base, si la dimensión es mayor que 1).

En un espacio real basta transponer. La base canónica es ortonormal respecto al producto interno usual; si el producto interno no es el usual, se usa la definición o una base ortonormal respecto a ese producto.

Propiedades del adjunto. $(T^*)^* = T$, $(T+S)^* = T^* + S^*$, $(\alpha T)^* = \overline{\alpha}\, T^*$ y $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$.

Tipos de operador. Con M la matriz en una base ortonormal:

Operador	Condición	Matriz y valores propios
normal	$T \circ T^* = T^* \circ T$	$MM^* = M^*M$
simétrico (real)	$T^* = T$	$M^T = M$; valores propios reales
hermitiano (complejo)	$T^* = T$	$M^* = M$; diagonal real; valores propios reales
antisimétrico (real)	$T^* = -T$	$M^T = -M$; diagonal de ceros
antihermitiano (complejo)	$T^* = -T$	$M^* = -M$; diagonal imaginaria pura; valores propios imaginarios puros
ortogonal (real)	$T^* = T^{-1}$	$M^T M = I$; columnas ortonormales
unitario (complejo)	$T^* = T^{-1}$	$M^* M = I$; valores propios de módulo 1

Todos los de la tabla son normales. Un operador puede ser normal sin ser de ninguno de los otros tipos.

Teorema espectral. En un espacio complejo de dimensión finita, T es normal si y solo si existe una base *ortonormal* de V formada por vectores propios de T. En un espacio real, T es simétrico si y solo si existe esa base ortonormal. En particular, toda matriz real simétrica es diagonalizable, y los vectores propios de valores propios distintos de un operador normal son ortogonales entre sí.

Descomposición espectral. Si T es normal (o simétrico, en el caso real) con valores propios distintos $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, entonces

$$T = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_k P_k,$$

donde P_i es la proyección ortogonal sobre $E(\lambda_i)$. Las proyecciones cumplen $P_1 + \cdots + P_k = I$ y $P_i P_j = 0$ si $i \neq j$. Si $\{\hat{e}\}$ es una base ortonormal de $E(\lambda_i)$,

$$P_i(\vec{v}) = \sum (\vec{v} \mid \hat{e})\, \hat{e}, \qquad \text{y en matriz} \qquad P_i = \sum \hat{e}\, \bar{\hat{e}}^{\,T},$$

donde $\hat{e}$ se escribe como columna. Así, en forma de regla, $T(\vec{v}) = \sum_i \lambda_i P_i(\vec{v})$. Si se toma una base ortonormal $\{\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n\}$ de vectores propios de todo V, con $T(\hat{e}_j) = \mu_j \hat{e}_j$ (cada valor propio se repite tantas veces como la dimensión de su espacio), queda $T(\vec{v}) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j (\vec{v} \mid \hat{e}_j)\, \hat{e}_j$.

Formas cuádricas. La ecuación de una cónica con centro en el origen, $ax^2 + bxy + cy^2 = d$, se escribe

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = d, \qquad A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}.$$

Para $\lambda_2 = -1$: $M + I = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, de donde $x = y$:

$$E(-1) = \{\beta(1,1) \mid \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Comprobación: $F(5,2) = (20-10,\ 10-6) = (10,4) = 2(5,2)$ y $F(1,1) = (-1,-1) = -1(1,1)$.

4. d) Con la base $\{(5,2),(1,1)\}$:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = P^{-1}MP.$$

5. **Resultado:** los valores característicos son 2 y -1; $E(2)$ está generado por $(5,2)$ y $E(-1)$ por $(1,1)$. La matriz diagonal está referida a la base $\{(5,2),(1,1)\}$. Cualquier múltiplo no nulo de cada vector propio, o el orden inverso en D y P a la vez, también es correcto.

3B.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 3B.5.1 · Matriz diagonalizadora de un operador en $\mathbb{R}^3$

Adaptado de: 2º final 2010-2, tipo A, problema 4.

Para el operador lineal $T:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $T(x,y,z) = (2x,\ 3x+2y+z,\ 4x+y+2z)$, obtenga:

- a) la matriz M asociada a T referida a la base canónica de $\mathbb{R}^3$;
- b) una matriz P tal que $P^{-1}MP$ sea una matriz diagonal.

Resolución.

1. a) $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
2. b) Se desarrolla $\det(M - \lambda I)$ por el primer renglón, que tiene dos ceros:

$$\det(M - \lambda I) = (2-\lambda)\big[(2-\lambda)^2 - 1\big] = (2-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda).$$

Valores propios: 1, 2 y 3. Son distintos, así que T es diagonalizable. Comprobación: $1+2+3 = 6 = \operatorname{tr} M$.

3. $\lambda = 1$: $M - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. El primer renglón da $x = 0$; el segundo, $y + z = 0$. Vector propio: $(0,-1,1)$.
4. $\lambda = 2$: $M - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. De $3x + z = 0$ y $4x + y = 0$: $z = -3x$, $y = -4x$. Con $x = -1$: $(-1,4,3)$.
5. $\lambda = 3$: $M - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. De $x = 0$ y $-y + z = 0$: $(0,1,1)$.

4. **Concluir «es producto interno» porque** $(\vec{v} \mid \vec{v}) \geq 0$**.** Hace falta que solo el vector cero dé cero.
5. **Dar** $W^{\perp}$ **como un vector.** Es un subespacio: gen{…} o un conjunto con parámetro.
6. **Usar el atajo del vector normal con un producto ponderado.** (a, b, c) es normal al plano $ax + by + cz = 0$ solo con el producto escalar usual.
7. **Olvidar comprobar.** $\vec{v} - \vec{p}$ debe ser ortogonal a W, y en Gram-Schmidt $(\vec{e}_i \mid \vec{e}_j) = 0$.
8. **En mínimos cuadrados, poner los renglones de** A **al revés.** El orden de las columnas de A es el de las incógnitas (a, b, c) del modelo.

4.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Axiomas: $(\vec{u} \mid \vec{v}) = \overline{(\vec{v} \mid \vec{u})} \cdot (\vec{u}+\vec{v} \mid \vec{w}) = (\vec{u} \mid \vec{w})+(\vec{v} \mid \vec{w}) \cdot (\alpha\vec{u} \mid \vec{v}) = \alpha(\vec{u} \mid \vec{v}) \cdot (\vec{v} \mid \vec{v}) > 0$ si $\vec{v} \neq \vec{0}$
- Usual en $\mathbb{C}^n$: $(\vec{u} \mid \vec{v}) = \sum u_i \overline{v_i} \cdot (\vec{u} \mid \alpha\vec{v}) = \overline{\alpha}(\vec{u} \mid \vec{v}) \cdot (A \mid B) = \operatorname{tr}(A^T B)$
- $\|\vec{v}\| = \sqrt{(\vec{v} \mid \vec{v})} \cdot d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\| \cdot \cos\theta = \frac{(\vec{u}|\vec{v})}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} \cdot |(\vec{u} \mid \vec{v})| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$
- Gram-Schmidt: $\vec{e}_k = \vec{v}_k - \sum_{i<k} \frac{(\vec{v}_k|\vec{e}_i)}{(\vec{e}_i|\vec{e}_i)}\vec{e}_i$
- $W^{\perp} = \{\vec{v} \mid (\vec{v} \mid \vec{w}_i) = 0\} \cdot \dim W + \dim W^{\perp} = \dim V$
- $\operatorname{proy}_W \vec{v} = \sum \frac{(\vec{v}|\vec{e}_i)}{(\vec{e}_i|\vec{e}_i)}\vec{e}_i$ (base ortogonal) · distancia mínima $= \|\vec{v} - \operatorname{proy}_W \vec{v}\|$
- Mínimos cuadrados: $A^T A\,\hat{x} = A^T\vec{b}$

4.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. El producto interno del enunciado escrito con componentes genéricas.
2. En «¿es producto interno?», los cuatro axiomas en orden, cada uno con «se cumple» o con un contraejemplo numérico.
3. Una base de W, y la comprobación de que es ortogonal (o Gram-Schmidt).
4. Cada producto $(\vec{v} \mid \vec{e}_i)$ y $(\vec{e}_i \mid \vec{e}_i)$ por separado, antes de armar la proyección.
5. El resultado con su comprobación: $\vec{v} - \vec{p} \perp W$, o $\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V$.

Si no sale la cuenta final, la base ortogonal de W y la fórmula de la proyección bien planteadas ya valen buena parte del problema.

2. $H(x+1) = H(x) + H(1) = -x - 1 + 1 = -x$. En la base D: $-x = 0\,(x+1) + 1\,(-x)$, coordenadas $(0, 1)$.
3. $H(-x) = -H(x) = x + 1 = 1\,(x+1) + 0\,(-x)$, coordenadas $(1, 0)$.
4. Las coordenadas son las columnas de la matriz.
5. **Resultado:** $M_D^D(H) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Comprobación: su polinomio característico es $\lambda^2 - 1$, con raíces 1 y -1, como debe ser.

Ejercicio 3B.5.4 · Regla a partir de los valores y vectores propios

Adaptado de: 2º final 2014-2, tipo A, problema 4.

Los valores propios del operador lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -3$. Un vector propio asociado a λ_1 es $\vec{u}_1 = (3, 9)$ y uno asociado a λ_2 es $\vec{u}_2 = (-1, 1)$.

- a) Determine si T es diagonalizable. En caso afirmativo, obtenga una matriz diagonal asociada a T y la base a la que está referida.
- b) Obtenga la regla de correspondencia de T.

Resolución.

1. a) Hay dos valores propios distintos en un espacio de dimensión 2: T es diagonalizable. $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, referida a la base $\{(3, 9), (-1, 1)\}$.
2. b) Con $P = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$: $\det P = 3 + 9 = 12$ y $P^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$.
3. $M = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -9 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} -24 & 12 \\ 36 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.
4. Comprobación: $M(3, 9)^T = (-6 + 9,\ 9) = (3, 9)$ y $M(-1, 1)^T = (2 + 1,\ -3) = (3, -3) = -3(-1, 1)$.
5. **Resultado:** $T(x, y) = (-2x + y,\ 3x)$.

Ejercicio 3B.5.5 · Operador a partir de su matriz diagonal y sus espacios característicos

Adaptado de: 2º extraordinario 2023-2, problema 4.

Sea el operador lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con matriz diagonal asociada $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, y espacios característicos $E(-1) = \{(k_1, -3k_1) \mid k_1 \in \mathbb{R}\}$ y $E(2) = \{(k_2, 0) \mid k_2 \in \mathbb{R}\}$. Obtenga:

- a) la matriz asociada a T en la base $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$;
- b) la regla de correspondencia de T.

Resolución.

1. Vectores propios: $(1, -3)$ para -1 y $(1, 0)$ para 2. En el orden de D: $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, $\det P = 3$, $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.
2. a) $M = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 4.5.9 · Mínimos cuadrados: la parábola que mejor se ajusta

Adaptado de: 1er final 2010-2, tipo C, problema 6.

Los resultados de un experimento son los puntos (x, y): $(-1, 0)$, $(0, 2)$, $(1, 1)$ y $(2, 0)$. Empleando el método de mínimos cuadrados, determine el polinomio de la forma $y = ax^2 + bx + c$ que mejor se ajusta a estos datos.

Planteamiento. Cuatro ecuaciones $ax_i^2 + bx_i + c = y_i$ con tres incógnitas: $A\vec{x} = \vec{b}$ no tiene solución exacta; se resuelven las ecuaciones normales.

Resolución.

1. Renglones $(x_i^2, x_i, 1)$:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
2. $A^TA = \begin{pmatrix} 18 & 8 & 6 \\ 8 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ (sumas de x^4, x^3, x^2, x y el número de datos) y $A^T\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ (sumas de x^2y, xy, y).
3. Se resuelve $18a + 8b + 6c = 1$, $8a + 6b + 2c = 1$, $6a + 2b + 4c = 3$: $a = -\frac{3}{4}$, $b = \frac{13}{20}$, $c = \frac{31}{20}$.
4. Comprobación: los residuos $\vec{b} - A\hat{x} = \frac{1}{20}(-3, 9, -9, 3)$ suman cero y son ortogonales a las columnas de A.
5. **Resultado:** $y = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{13}{20}x + \frac{31}{20} = -0.75x^2 + 0.65x + 1.55$.

4.6 Ejercicios propuestos

Ejercicio propuesto 4.6.1

Adaptado de: 2º final 2010-2, tipo A, problema 5.

Determine si el producto definido como $(\vec{x} \mid \vec{y}) = \left(\sum_{i=1}^{4} 2x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{4} 3y_i\right)$, para $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^4$, es un producto interno en $\mathbb{R}^4$.

Resultado: no es producto interno: cumple simetría, aditividad y homogeneidad, pero falla la positividad ($(1, -1, 0, 0)$ da cero).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 96.

Ejercicio propuesto 4.6.2

Adaptado de: 1er final 2015-1, tipo A, problema 5.

Sea M el espacio de las matrices reales de 2×2 con el producto interno $\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\right) = ax + by + cz + dw$, y sea $W = \left\{ \begin{pmatrix} m & n \\ n & r \end{pmatrix} \middle| \, m, n, r \in \mathbb{R} \right\}$. Determine la proyección ortogonal de $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sobre W.

4. $\lambda = 3$: $-2a + 2b = 0$, $c = 0$: $(1, 1, 0)$, es decir, $x^2 + x$.
5. $\lambda = -1$: $2a + 2b = 0$ y $4b + c = 0$. Con $b = -1$: $a = 1$, $c = 4$: $(1, -1, 4)$, es decir, $x^2 - x + 4$.
6. Comprobación: $T(x^2 - x + 4) = (1-2)x^2 + (-3+4)x - 4 = -x^2 + x - 4 = -(x^2 - x + 4)$.
7. **Resultado:** sí es diagonalizable;
$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3B.6 Ejercicios propuestos

Ejercicio propuesto 3B.6.1

Adaptado de: 2º final 2024-1, problema 4.

Sea el operador lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con regla $T(x, y, z) = (-2x + z, \, -5y, \, 6x - 3z)$. Determine:

- a) una matriz asociada a T;
- b) los espacios característicos asociados a cada valor propio;
- c) una matriz diagonal D asociada a T y la base a la que está referida.

Resultado: valores propios 0 y -5 (doble). $E(0)$ está generado por $(1, 0, 2)$, y $E(-5)$ por $(0, 1, 0)$ y $(1, 0, -3)$. $D = \text{diag}(0, -5, -5)$ en la base formada por esos tres vectores.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 95.

Ejercicio propuesto 3B.6.2

Adaptado de: 1er final 2026-1, problema 4.

Sean el espacio vectorial real $P = \{ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ y el operador lineal $F : P \to P$ con regla $F(ax + b) = (a - 2b)x + (b - 2a)$. Determine una matriz diagonal D asociada a F y una base a la que está referida.

Resultado: $D = \text{diag}(-1, 3)$, referida a la base $\{x + 1, \, x - 1\}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 95.

Ejercicio propuesto 3B.6.3

Adaptado de: 3er extraordinario 2026-1, problema 4.

Sea el operador lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada en la base canónica es

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Determine: a) los valores propios de T; b) si T es diagonalizable.

Resultado: a) 1 y 3 (doble); b) sí: $\dim E(3) = 2$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 95.

1. $A - B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
2. $\operatorname{tr}\big((A-B)(A-B)^T\big)$ es la suma de los cuadrados de las entradas: $1+1+1+1=4$.
3. $d(A,B)^2 = (A-B \mid A-B) = 4k$. Se pide $d=4$: $4k=16$.
4. **Resultado:** $k=4$. Es positivo, así que la función sí es un producto interno.

Ejercicio 4.5.5 · Conjunto ortogonal (demostración)

Adaptado de: 2º final 2010-2, tipo A, problema 6.

Para toda pareja de vectores $\vec{u}$ y $\vec{w}$ diferentes de cero en un espacio vectorial real V con producto interno, determine si

$$A = \left\{ \vec{u} - \frac{(\vec{u} \mid \vec{w})}{\|\vec{w}\|^2}\,\vec{w},\ \ \vec{w} \right\}$$

es un conjunto ortogonal.

Resolución.

1. Se calcula el producto de los dos vectores, con las propiedades de linealidad:

$$\left(\vec{u} - \frac{(\vec{u} \mid \vec{w})}{\|\vec{w}\|^2}\vec{w} \,\middle|\, \vec{w} \right) = (\vec{u} \mid \vec{w}) - \frac{(\vec{u} \mid \vec{w})}{\|\vec{w}\|^2}(\vec{w} \mid \vec{w}).$$

2. Como $(\vec{w} \mid \vec{w}) = \|\vec{w}\|^2$, el segundo término es $(\vec{u} \mid \vec{w})$ y la diferencia es cero.
3. **Resultado:** sí, A es un conjunto ortogonal para cualquier pareja. Es exactamente el paso de Gram-Schmidt: a $\vec{u}$ se le quita su proyección sobre $\vec{w}$.

Ejercicio 4.5.6 · Base ortogonal, complemento y proyección con un producto ponderado

Adaptado de: 1er final 2014-1, tipo B, problema 5.

Sea $\mathbb{R}^3$ con el producto interno $(\vec{u} \mid \vec{v}) = u_1v_1 + 2u_2v_2 + u_3v_3$ y sea W el subespacio con base $K = \{(1,0,1),\ (0,1,-1)\}$. Determine:

- a) una base ortogonal de W;
- b) el complemento ortogonal de W;
- c) la proyección de $\vec{u} = (1,1,1)$ sobre W.

Resolución.

1. a) $\vec{e}_1 = (1,0,1)$, $(\vec{e}_1 \mid \vec{e}_1) = 1+0+1 = 2$. $(\vec{v}_2 \mid \vec{e}_1) = 0+0-1 = -1$.
2. $\vec{e}_2 = (0,1,-1) - \frac{-1}{2}(1,0,1) = \left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$; se toma $\vec{e}_2 = (1,2,-1)$. Comprobación con el producto ponderado: $(\vec{e}_2 \mid \vec{e}_1) = 1+0-1 = 0$. Base ortogonal: $\{(1,0,1),(1,2,-1)\}$.
3. b) $\vec{v} = (a,b,c) \in W^\perp$: $(\vec{v} \mid (1,0,1)) = a+c = 0$ y $(\vec{v} \mid (0,1,-1)) = 2b-c = 0$. Con $c = 2\alpha$: $a = -2\alpha$, $b = \alpha$.

$$W^\perp = \{\alpha(-2,1,2) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

   Ojo: $(-2,1,2)$ no es perpendicular a W con el producto escalar usual; lo es con el ponderado.
4. c) $(\vec{u} \mid \vec{e}_1) = 1+0+1 = 2$; $(\vec{u} \mid \vec{e}_2) = 1+4-1 = 4$, $(\vec{e}_2 \mid \vec{e}_2) = 1+8+1 = 10$.
5. $\vec{p} = \frac{2}{2}(1,0,1) + \frac{4}{10}(1,2,-1) = \left(\frac{7}{5}, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

- $\sum \lambda_i = \operatorname{tr} M \cdot \prod \lambda_i = \det M \cdot$ triangular: los valores propios están en la diagonal
- $\dim E(\lambda) = n - \operatorname{rango}(M - \lambda I) \cdot 1 \le$ m. geométrica $\le$ m. algebraica
- Diagonalizable $\iff \sum \dim E(\lambda_i) = n \cdot n$ valores distintos $\Rightarrow$ diagonalizable
- $D = P^{-1}MP$, columnas de P = vectores propios en el orden de $D \cdot M = PDP^{-1}$
- $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

3B.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. La matriz asociada, con la base que se usó.
2. $\det(M - \lambda I)$ desarrollado por la línea con más ceros, y el polinomio factorizado.
3. Los valores propios con su multiplicidad, y la comprobación con la traza.
4. Para cada valor propio, la matriz $M - \lambda I$, el sistema y $E(\lambda)$ con su parámetro.
5. La conclusión sobre la diagonalización con su razón (valores distintos, o multiplicidades iguales).
6. D y P (o la base) en el mismo orden, y una comprobación $T(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$.

Si no sale el polinomio, la matriz $M - \lambda I$ bien planteada y el criterio de diagonalización ya valen buena parte del problema.

3. Termina con la igualdad pedida y una frase de conclusión.

4.4 Ejemplo resuelto

Adaptado de: 2º final 2014-2, tipo A, problema 5.

Sea el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ con el producto interno usual y sea $W = \{(x, y, z) \mid x + y - z = 0\}$. Determine la proyección de $\vec{m} = (2, -1, 3)$ sobre W.

Datos. W es un plano por el origen con vector normal $\vec{n} = (1, 1, -1)$.

Planteamiento. $\text{proy}_W \vec{m} = \sum \frac{(\vec{m}|\vec{e_i})}{(\vec{e_i}|\vec{e_i})}\vec{e_i}$ con una base ortogonal de W; se comprueba con $\vec{m} - \vec{p} \in W^\perp$.

Resolución.

1. Base de W: $z = x + y$, así que $(x, y, x+y) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1)$. Estos dos vectores no son ortogonales: $(1, 0, 1) \cdot (0, 1, 1) = 1$.
2. Gram-Schmidt: $\vec{e}_1 = (1, 0, 1)$; $\vec{e}_2 = (0, 1, 1) - \frac{1}{2}(1, 0, 1) = \left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$, y se toma $\vec{e}_2 = (-1, 2, 1)$. Comprobación: $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = -1 + 0 + 1 = 0$.
3. $(\vec{m} \mid \vec{e}_1) = 2 + 3 = 5$, $(\vec{e}_1 \mid \vec{e}_1) = 2$; $(\vec{m} \mid \vec{e}_2) = -2 - 2 + 3 = -1$, $(\vec{e}_2 \mid \vec{e}_2) = 6$.
4. $\vec{p} = \frac{5}{2}(1, 0, 1) - \frac{1}{6}(-1, 2, 1) = \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{2} - \frac{1}{6}\right) = \left(\frac{8}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)$.
5. Comprobación con el atajo: $\vec{m} - \frac{(\vec{m}|\vec{n})}{(\vec{n}|\vec{n})}\vec{n} = (2, -1, 3) - \frac{-2}{3}(1, 1, -1) = \left(\frac{8}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)$. Además $\frac{8}{3} - \frac{1}{3} - \frac{7}{3} = 0$: $\vec{p} \in W$.
6. **Resultado:** $\text{proy}_W \vec{m} = \left(\frac{8}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)$. La distancia de $\vec{m}$ a W es $\|\vec{m} - \vec{p}\| = \frac{2}{3}\|(1, 1, -1)\| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

4.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 4.5.1 · ¿Es producto interno? Un cuadrado disfrazado

Adaptado de: 1er final 2014-2, tipo B, problema 3.

Determine si la función $G : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $G\big((x, y), (z, w)\big) = xz + xw + yz + yw$ es un producto interno en $\mathbb{R}^2$. En caso negativo, indique todos los axiomas de la definición que no satisface.

Planteamiento. Se factoriza: $G\big((x, y), (z, w)\big) = (x + y)(z + w)$. Se revisan los cuatro axiomas.

Resolución.

1. **Simetría:** $G\big((z, w), (x, y)\big) = (z + w)(x + y) = G\big((x, y), (z, w)\big)$. Se cumple.
2. **Aditividad:** con $\vec{u} = (x_1, y_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2)$: $(x_1 + x_2 + y_1 + y_2)(z + w) = (x_1 + y_1)(z + w) + (x_2 + y_2)(z + w)$. Se cumple.
3. **Homogeneidad:** $(\alpha x + \alpha y)(z + w) = \alpha(x + y)(z + w)$. Se cumple.
4. **Positividad:** $G\big((x, y), (x, y)\big) = (x + y)^2 \geq 0$, pero vale cero en vectores no nulos: $G\big((1, -1), (1, -1)\big) = 0$ con $(1, -1) \neq \vec{0}$. No se cumple.
5. **Resultado:** G **no** es un producto interno. Solo falla la positividad: hay vectores no nulos, como $(1, -1)$, con $G(\vec{v}, \vec{v}) = 0$.

libros, como el de Lay, conjugan el primer argumento; con ellos, los resultados de un mismo ejercicio pueden salir conjugados.

Norma, distancia y ángulo.

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(\vec{v} \mid \vec{v})}, \qquad d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\|, \qquad \cos\theta = \frac{(\vec{u} \mid \vec{v})}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|} \text{ (espacio real).}$$

Un vector *unitario* tiene norma 1; $\vec{v}/\|\vec{v}\|$ es unitario. Todo depende del producto interno: con otro producto, los mismos vectores tienen otra norma y otro ángulo.

SOLO PLAN 2010 **Desigualdad de Cauchy-Schwarz.** $|(\vec{u} \mid \vec{v})| \leq \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$, con igualdad solo si los vectores son linealmente dependientes. Es la razón de que el cociente que define $\cos\theta$ esté entre -1 y 1. De ella sale la *desigualdad del triángulo*, $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$, que se pide comprobar con números en el ejercicio 4.5.3.

Ortogonalidad. $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son *ortogonales* si $(\vec{u} \mid \vec{v}) = 0$. Un conjunto es *ortogonal* si sus vectores son ortogonales dos a dos, y *ortonormal* si además todos son unitarios. Un conjunto ortogonal de vectores no nulos es linealmente independiente.

Coordenadas en una base ortogonal. Si $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ es una base ortogonal, no hace falta resolver un sistema:

$$\vec{v} = \sum_i \frac{(\vec{v} \mid \vec{e}_i)}{(\vec{e}_i \mid \vec{e}_i)}\,\vec{e}_i.$$

En una base ortonormal los denominadores valen 1.

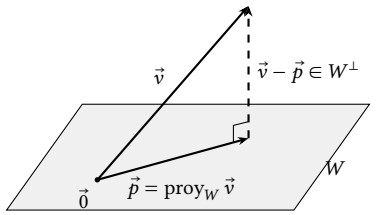
Complemento ortogonal. Si W es un subespacio de V,

$$W^\perp = \{\vec{v} \in V \mid (\vec{v} \mid \vec{w}) = 0 \text{ para todo } \vec{w} \in W\}.$$

Es un subespacio, y basta pedir la ortogonalidad con los vectores de una base de W. En dimensión finita, $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$.

Teorema de proyección. Cada $\vec{v} \in V$ se escribe de una sola manera como $\vec{v} = \vec{p} + \vec{q}$, con $\vec{p} \in W$ y $\vec{q} \in W^\perp$. El vector $\vec{p} = \text{proy}_W \vec{v}$ es la *proyección* de $\vec{v}$ sobre W: es el vector de W **más cercano** a $\vec{v}$, y la distancia mínima de $\vec{v}$ a W es $\|\vec{v} - \vec{p}\|$. Con una base ortogonal $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k\}$ de W:

$$\text{proy}_W \vec{v} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(\vec{v} \mid \vec{e}_i)}{(\vec{e}_i \mid \vec{e}_i)}\,\vec{e}_i.$$



Mínimos cuadrados. Si el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ no tiene solución (más ecuaciones que incógnitas, datos experimentales), la *solución por mínimos cuadrados* $\hat{x}$ es la que hace

2. P tiene esos vectores como columnas; D tiene los valores propios en la diagonal, **en el mismo orden**.
3. La base a la que está referida D es el conjunto de esos vectores propios, en ese orden.
4. Si sobra tiempo, comprueba $MP = PD$ (es más rápido que invertir P).

3B.3.5 Operador a partir de sus valores y vectores propios

1. Con los vectores propios como columnas forma P, y con los valores propios, D.
2. La matriz en la base canónica es $M = PDP^{-1}$.
3. La regla sale de M: $T(x, y) = M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
4. Alternativa sin inversa: escribe (x, y) como combinación lineal de los vectores propios, $(x, y) = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2$, y aplica T: $T(x, y) = \alpha\lambda_1\vec{v}_1 + \beta\lambda_2\vec{v}_2$.

3B.3.6 Operadores en polinomios y en matrices

1. Fija una base ordenada ($\{x^2, x, 1\}$ para P_2) y escribe la matriz asociada: la columna j es el vector de coordenadas de la imagen del j-ésimo vector de la base.
2. Haz 3B.3.1 a 3B.3.4 con esa matriz.
3. Traduce cada vector propio de coordenadas a polinomio (o matriz) antes de dar el resultado.

3B.4 Ejemplo resuelto

Adaptado de: 1er final 2014-1, tipo B, problema 4.

Sea el operador lineal $F:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con regla $F(x, y) = (4x - 5y,\ 2x - 3y)$. Determine:

- a) una matriz M asociada a F;
- b) los valores característicos de F;
- c) los espacios característicos de F;
- d) una matriz diagonal asociada a F y una matriz diagonalizadora de M.

Datos. Operador en $\mathbb{R}^2$; se usa la base canónica.

Planteamiento. $p(\lambda) = \det(M - \lambda I) = 0$; luego $E(\lambda) = N(M - \lambda I)$; con dos valores distintos, F es diagonalizable.

Resolución.

1. a) Los coeficientes de x van en la primera columna y los de y en la segunda:

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

2. b) $\det(M - \lambda I) = (4 - \lambda)(-3 - \lambda) + 10 = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1)$. Los valores característicos son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = -1$. Comprobación: $2 + (-1) = 1 = \operatorname{tr} M$ y $2(-1) = -2 = \det M$.
3. c) Para $\lambda_1 = 2$: $M - 2I = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$, de donde $2x - 5y = 0$ y $x = \frac{5}{2}y$. Con $y = 2\alpha$:

$$E(2) = \{\alpha(5, 2) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

A es simétrica, así que tiene una base ortonormal de vectores propios $\hat{e}_1, \hat{e}_2$. Con el cambio de variables $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $P = [\,\hat{e}_1\ \hat{e}_2\,]$, la ecuación queda **sin término mixto**:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = d.$$

Los nuevos ejes x', y' apuntan en la dirección de los vectores propios (ejes principales). Si los dos valores propios tienen el signo de d, es una elipse; si tienen signos contrarios, una hipérbola; si uno es cero, una parábola degenerada (rectas paralelas o vacío).

5.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«obtener el adjunto», «T^*», «$\|T^*(\vec{v})\|$»	regla de T^*	5.3.1
«determinar si es normal / simétrico / hermitiano / antisimétrico / antihermitiano / unitario»	comparar M con M^*	5.3.2
«determinar k para que sea hermitiano (antihermitiano)»	igualar entradas	5.3.2
«descomposición espectral», «proyecciones», «mediante la descomposición espectral obtener la regla»	$T = \sum \lambda_i P_i$	5.3.3
«ecuación de la cónica sin término mixto», «forma cuádrica»	$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = d$	5.3.4

5.3 Procedimientos

5.3.1 Adjunto

1. Comprueba que el producto interno sea el usual (o que la base sea ortonormal respecto al producto dado).
2. Escribe la matriz M de T en la base canónica.
3. $M(T^*) = \overline{M}^{\,T}$: transpón y conjuga cada entrada ($i \to -i$).
4. Escribe la regla: $T^*(x, y) = M^*\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
5. Si se pide $T^*(\vec{v})$ o su norma, aplica la regla y usa $\|\vec{w}\|^2 = \sum |w_i|^2$, con $|a + bi|^2 = a^2 + b^2$.

5.3.2 Tipo de operador

1. Calcula M^*.
2. Si $M^* = M$: simétrico (real) o hermitiano (complejo). Si $M^* = -M$: antisimétrico o antihermitiano. En los dos casos, también es normal.
3. Si no, calcula MM^* y M^*M y compáralos: normal si son iguales. Para unitario u ortogonal: $M^*M = I$.

6. Comprobación de uno: $T(-1,4,3) = (-2,\ -3+8+3,\ -4+4+6) = (-2,8,6) = 2(-1,4,3)$.
7. **Resultado:**

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3B.5.2 · Espacios característicos y base de la matriz diagonal

Adaptado de: 1er final 2014-2, tipo A, problema 3.

Sea el operador lineal $F:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con regla $F(x,y,z) = (4x+2z,\ 3y,\ 2x+z)$. Determine:

- a) una matriz M asociada a F;
- b) los espacios característicos de F;
- c) una matriz diagonal asociada a F y la base a la que está referida.

Resolución.

1. a) $M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Se desarrolla por el segundo renglón:

$$\det(M-\lambda I) = (3-\lambda)\big[(4-\lambda)(1-\lambda)-4\big] = (3-\lambda)(\lambda^2-5\lambda) = -\lambda(\lambda-3)(\lambda-5).$$

   Valores propios: 0, 3 y 5. El valor 0 indica que F no es inyectiva.
3. b) $\lambda=0$: $M\vec{v}=\vec{0}$ da $y=0$ y $2x+z=0$: $E(0) = \{\alpha(1,0,-2) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.
4. $\lambda=3$: $M-3I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ da $x=z=0$: $E(3) = \{\beta(0,1,0) \mid \beta \in \mathbb{R}\}$.
5. $\lambda=5$: $M-5I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ da $y=0$ y $x=2z$: $E(5) = \{\gamma(2,0,1) \mid \gamma \in \mathbb{R}\}$.
6. **Resultado:** $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, referida a la base $\{(1,0,-2),(0,1,0),(2,0,1)\}$.

Ejercicio 3B.5.3 · Matriz asociada a partir de los vectores propios, en polinomios

Adaptado de: 1er final 2010-2, tipo C, problema 3.

Sean el espacio vectorial real $P_1 = \{ax+b \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ y el operador lineal $H:\ P_1 \to P_1$. Los polinomios $p(x)=1$ y $q(x)=2x+1$ son vectores propios de H asociados a los valores propios $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$, respectivamente. Determine la matriz asociada a H respecto a la base $D = \{x+1,\ -x\}$.

Planteamiento. Basta conocer H en la base de vectores propios. Se escribe cada vector de D como combinación de p y q, se aplica H y se vuelve a escribir el resultado en la base D.

Resolución.

1. $H(1)=1$ y $H(2x+1) = -(2x+1)$. Como $x = \frac{1}{2}(2x+1) - \frac{1}{2}\cdot 1$:

$$H(x) = \tfrac{1}{2}H(2x+1) - \tfrac{1}{2}H(1) = -\tfrac{1}{2}(2x+1) - \tfrac{1}{2} = -x-1.$$

Unidad 5 · Operadores lineales en espacios con producto interno: adjunto, tipos de operador y teorema espectral

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura, Plan 2010). El alumno analizará las características principales de los operadores lineales definidos en espacios con producto interno y su aplicación a la resolución de problemas de ingeniería.

Objetivo (Plan 2016). El alumno analizará las características principales de los operadores lineales definidos en espacios con producto interno y las utilizará en la resolución de problemas de espacios vectoriales.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** aparece en los 8 finales del Plan 2010 y en 28 de los 29 finales y extraordinarios del Plan 2016. Casi siempre es el último problema y vale de 14 a 20 puntos.
- **Qué sale:** «obtener el adjunto y decidir si es normal, simétrico, hermitiano…» o «la descomposición espectral». En el Plan 2016 sale además, a veces, una cónica sin término mixto (3 de 29).
- **Antes:** esta unidad usa los valores y vectores propios de la Unidad 3B y la normalización de la Unidad 4.
- **Tiempo:** de 3 a 4 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 5.1 (20 min), sobre todo la tabla de tipos de operador.
  2. Sigue el ejemplo 5.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 5.5 con cronómetro (15 min cada uno).

5.1 Conceptos y expresiones

Convención del producto interno. En los espacios complejos, el producto interno es lineal en el primer argumento y conjugado en el segundo. El usual en $\mathbb{C}^n$ es

$$(\vec{u} \mid \vec{v}) = u_1\overline{v_1} + u_2\overline{v_2} + \cdots + u_n\overline{v_n},$$

como lo escriben los exámenes. Así, $(\alpha\vec{u} \mid \vec{v}) = \alpha(\vec{u} \mid \vec{v})$ y $(\vec{u} \mid \alpha\vec{v}) = \overline{\alpha}(\vec{u} \mid \vec{v})$. En los espacios reales la barra no hace nada.

Adjunto. Sea V un espacio con producto interno y $T:\ V \to V$ un operador lineal. El *adjunto* de T es el operador $T^*:\ V \to V$ que cumple

$$(T(\vec{u}) \mid \vec{v}) = (\vec{u} \mid T^*(\vec{v})) \qquad \text{para todos } \vec{u},\vec{v} \in V.$$

En dimensión finita siempre existe y es único. **Si M es la matriz de T en una base ortonormal**, la matriz de T^* en esa misma base es la conjugada transpuesta:

$$M(T^*) = \overline{M}^{\,T} = M^*.$$

3. Comprobación: M es triangular con diagonal $2, -1$; $M(1,-3)^T = (2-3,\ 3) = (-1,3) = -1(1,-3)$.
4. b) **Resultado:** $M_B^B(T) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $T(x,y) = (2x+y,\ -y)$.

Ejercicio 3B.5.6 · Valor de k para que el operador sea diagonalizable

Adaptado de: 1er extraordinario 2024-1, problema 4.

Sea el operador lineal $T:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determine el valor de $k \in \mathbb{R}$ para que T sea diagonalizable.

Resolución.

1. Se desarrolla por el tercer renglón: $\det(A-\lambda I) = (1-\lambda)\big[(1-\lambda)(3-\lambda)\big] = (1-\lambda)^2(3-\lambda)$. El parámetro no afecta: $\lambda = 1$ (multiplicidad algebraica 2) y $\lambda = 3$ (simple).
2. Para que sea diagonalizable hace falta $\dim E(1) = 2$, es decir, $\operatorname{rango}(A-I) = 1$:

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k \\ -2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   El segundo renglón no es nulo. El primero es múltiplo del segundo solo si $k = 0$. Si $k \neq 0$, el rango es 2 y $\dim E(1) = 1 < 2$.
3. Con $k = 0$: $-2a + 2b + 5c = 0$, dos variables libres: $E(1) = \operatorname{gen}\{(1,1,0),(5,0,2)\}$. Para $\lambda = 3$: $A - 3I = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ da $a = c = 0$: $E(3) = \operatorname{gen}\{(0,1,0)\}$. Las dimensiones suman 3.
4. **Resultado:** $k = 0$. Con ese valor, $D = \operatorname{diag}(1,1,3)$ en la base $\{(1,1,0),(5,0,2),(0,1,0)\}$.

Ejercicio 3B.5.7 · ¿Es diagonalizable un operador en polinomios?

Adaptado de: 3er extraordinario 2023-2, problema 4.

Sea P el espacio de los polinomios de grado menor o igual a dos con coeficientes reales, y $T:\ P \to P$ con regla $T(ax^2+bx+c) = (a+2b)x^2 + (3b+c)x - c$. Determine si T es diagonalizable y, en caso afirmativo, obtenga una matriz N tal que $D = N^{-1}M(T)N$.

Resolución.

1. En la base $\{x^2, x, 1\}$, las columnas son las coordenadas de $T(x^2) = x^2$, $T(x) = 2x^2 + 3x$ y $T(1) = x - 1$:

$$M(T) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Es triangular: los valores propios son 1, 3 y -1, distintos. T es diagonalizable.
3. $\lambda = 1$: $2b = 0$, $2b + c = 0$, $-2c = 0$: $(1,0,0)$, es decir, x^2.

Resultado: $\operatorname{proy}_W B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 96.

Ejercicio propuesto 4.6.3

Adaptado de: 1er extraordinario 2025-2, problema 5.

Sean $W = \{(b,b) \mid b \in \mathbb{R}\}$ un subespacio de $\mathbb{R}^2$ y el producto interno $(\vec{u} \mid \vec{v}) = 2u_1v_1 + u_2v_2$.

- a) Determine el complemento ortogonal $W^\perp$.
- b) Exprese $(2,-1) = \vec{w} + \vec{w}'$, con $\vec{w} \in W$ y $\vec{w}' \in W^\perp$.

Resultado: a) $W^\perp = \operatorname{gen}\{(1,-2)\}$; b) $\vec{w} = (1,1)$, $\vec{w}' = (1,-2)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 97.

Ejercicio propuesto 4.6.4

Adaptado de: 2º final 2024-1, problema 5.

Sea $B = \{(1,2,1),(1,-1,1)\}$ una base de un subespacio W de $\mathbb{R}^3$. Con el producto interno usual, obtenga el vector de W más cercano a $(4,2,-3)$.

Resultado: $\left(\frac{1}{2},\ 2,\ \frac{1}{2}\right)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 97.

Ejercicio propuesto 4.6.5

Adaptado de: 3er extraordinario 2026-1, problema 5.

En $P_2 = \{ax^2+bx+c \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$ con el producto interno $(f \mid g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$, use Gram-Schmidt para obtener una base ortogonal a partir de $B = \{1, x, x^2\}$.

Resultado: $\left\{1,\ x,\ x^2 - \frac{1}{3}\right\}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 97.

Ejercicio propuesto 4.6.6

Adaptado de: 1er extraordinario 2026-1, problema 5.

Sea P el espacio de los polinomios de grado menor o igual a dos con coeficientes reales, con el producto interno $(p \mid q) = \sum_{i=0}^{2} p(i)\,q(i)$, y sea $W = \{ax^2 + ax - a \mid a \in \mathbb{R}\}$. Determine el complemento ortogonal $W^\perp$.

Resultado: $W^\perp = \{ax^2+bx+c \mid 21a + 11b + 5c = 0\} = \operatorname{gen}\{5x^2 - 21,\ 5x - 11\}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 97.

4.7 Errores frecuentes

1. **Usar el producto usual cuando el enunciado da otro.** Con un producto ponderado cambian la norma, el complemento y la proyección.
2. **Conjugar el argumento equivocado.** En los exámenes se conjuga el segundo: $(\vec{u} \mid \vec{v}) = \sum u_i\overline{v_i}$. En $\|\vec{v}\|^2$ aparece $|v_i|^2$, nunca v_i^2 con v_i complejo.
3. **Proyectar sobre una base que no es ortogonal.** La fórmula de la proyección solo vale con una base ortogonal; si no lo es, primero Gram-Schmidt.

Ejercicio propuesto 3B.6.4

Adaptado de: 1er extraordinario 2025-2, problema 4.

Sean $P = \{ax^2+bx+c \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$ y el operador lineal $T:\ P \to P$ con regla $T(ax^2+bx+c) = (2a+2c)x^2 + (-a+b)x + (a+3c)$.

- a) Obtenga los valores y los vectores característicos de T.
- b) Obtenga los espacios característicos de T.
- c) Determine si T es diagonalizable.

Resultado: a) $\lambda = 1$ (doble) con vectores αx, $\alpha \neq 0$; $\lambda = 4$ con vectores $\beta(3x^2 - x + 3)$, $\beta \neq 0$; b) $E(1) = \{\alpha x\}$, $E(4) = \{\beta(3x^2 - x + 3)\}$; c) no es diagonalizable.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 95.

Ejercicio propuesto 3B.6.5

Adaptado de: 1er final 2018-1, tipo D, problema 4.

Sea el operador lineal $T:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $T(a,b,c) = (a+2b,\ -2b+c,\ 3c)$. Determine: a) los valores propios de T; b) los espacios propios; c) si existe, la matriz diagonal asociada a T.

Resultado: a) 1, −2 y 3; b) $E(1) = \text{gen}\{(1,0,0)\}$, $E(-2) = \text{gen}\{(2,-3,0)\}$, $E(3) = \text{gen}\{(1,1,5)\}$; c) $D = \text{diag}(1,-2,3)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 96.

3B.7 Errores frecuentes

1. **Armar M por renglones equivocados.** En $T(x,y) = (4x-5y,\ 2x-3y)$, los coeficientes de cada componente forman un renglón, $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$; es lo mismo que poner en columnas las imágenes de los vectores canónicos. El error es escribir la transpuesta.
2. **Restar λ fuera de la diagonal.** $M - \lambda I$ solo cambia la diagonal.
3. **Desarrollar el determinante sin buscar ceros.** Un renglón o una columna con dos ceros da el polinomio ya factorizado; desarrollarlo completo y volver a factorizar es donde se pierden signos.
4. **Tomar el vector cero como vector propio** o dar $E(\lambda)$ sin el parámetro. El espacio característico incluye al cero; los vectores propios, no.
5. **Concluir «no diagonalizable» porque hay un valor repetido.** Un valor repetido solo obliga a comparar la multiplicidad geométrica con la algebraica.
6. **Cambiar el orden entre P y D.** La columna j de P es el vector propio del valor que está en la posición j de D.
7. **Dar coordenadas en lugar del polinomio o la matriz.** Si el operador es de P_2, los vectores propios son polinomios: $(1,-1,4)$ se escribe $x^2 - x + 4$.
8. **No comprobar.** $T(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$ se verifica en una línea, y la traza y el determinante controlan los valores propios.

3B.8 Formulario de emergencia de la unidad

- $T(\vec{v}) = \lambda\vec{v},\ \vec{v} \neq \vec{0} \cdot E(\lambda) = N(M - \lambda I) \cdot p(\lambda) = \det(M - \lambda I)$

6. Comprobación: $\vec{u} - \vec{p} = \left(-\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{5}(-2,1,2) \in W^\perp$.
7. **Resultado:** a) $\{(1,0,1),(1,2,-1)\}$; b) $W^\perp = \text{gen}\{(-2,1,2)\}$; c) $\text{proy}_W\,\vec{u} = \left(\frac{7}{5}, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

Ejercicio 4.5.7 · Complemento ortogonal en matrices con $\text{tr}(A^TB)$

Adaptado de: 3er extraordinario 2023-2, problema 5.

Sea M el espacio de las matrices reales de 2×2 con el producto interno $(A \mid B) = \text{tr}(A^TB)$, y sea $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \middle|\ a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$.

- a) Determine el complemento ortogonal $W^\perp$.
- b) Exprese $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ como $C = A + B$, con $A \in W$ y $B \in W^\perp$.

Resolución.

1. $\text{tr}(A^TB)$ es la suma de los productos entrada por entrada. Una base de W son las tres matrices canónicas E_{11}, E_{12}, E_{21}.
2. a) $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in W^\perp$ exige $(X \mid E_{11}) = x = 0$, $(X \mid E_{12}) = y = 0$, $(X \mid E_{21}) = z = 0$.

$$W^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \middle|\ t \in \mathbb{R} \right\}.$$

   Comprobación: $\dim W + \dim W^\perp = 3 + 1 = 4 = \dim M$.
3. b) La base de W es ortonormal, así que la proyección es quedarse con las tres entradas de W.
4. **Resultado:** a) $W^\perp = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$; b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in W$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \in W^\perp$.

Ejercicio 4.5.8 · Polinomio más próximo con un producto por evaluación

Adaptado de: 1er final 2025-2, problema 5.

Sea $P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$ y $W = \{ax^2 \mid a \in \mathbb{R}\}$ un subespacio de P_2. Determine el polinomio $h(x) \in W$ más próximo a $m(x) = x^2 + 1$, con el producto interno

$$(p \mid q) = \sum_{i=-1}^{1} p(i)\,q(i) = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

Resolución.

1. $W = \text{gen}\{x^2\}$: una base de un solo vector ya es ortogonal. $h = \frac{(m|x^2)}{(x^2|x^2)}\,x^2$.
2. Valores en $-1, 0, 1$: m vale 2, 1, 2 y x^2 vale 1, 0, 1.
3. $(m \mid x^2) = 2(1) + 1(0) + 2(1) = 4$ y $(x^2 \mid x^2) = 1 + 0 + 1 = 2$.
4. $h = \frac{4}{2}x^2 = 2x^2$.
5. Comprobación: $m - h = 1 - x^2$ vale 0, 1, 0, y $(1 - x^2 \mid x^2) = 0 + 0 + 0 = 0$: es ortogonal a W.
6. **Resultado:** $h(x) = 2x^2$. La distancia mínima es $\|m - h\| = \sqrt{0 + 1 + 0} = 1$.

Unidad 4 · Espacios con producto interno: norma, ortogonalidad, Gram-Schmidt y proyección

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno determinará si una función es un producto interno y analizará sus características fundamentales a efecto de aplicarlo en la resolución de problemas de espacios vectoriales. (El Plan 2016 dice lo mismo.)

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** aparece en los 8 finales del Plan 2010 y en los 29 finales y extraordinarios del Plan 2016, casi siempre como problema 5. Lo que más sale es el complemento ortogonal y la proyección (vector más cercano); después, «¿es producto interno?» y Gram-Schmidt.
- **Tiempo:** de 3 a 4 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 4.1 (25 min).
  2. Sigue el ejemplo 4.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 4.5 con cronómetro (15 min cada uno).

4.1 Conceptos y expresiones

Producto interno real. En un espacio vectorial real V, un *producto interno* es una función que a cada par de vectores $\vec{u}, \vec{v}$ asigna un número real $(\vec{u} \mid \vec{v})$ y que cumple, para todos $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R}$:

1. **Simetría:** $(\vec{u} \mid \vec{v}) = (\vec{v} \mid \vec{u})$.
2. **Aditividad:** $(\vec{u} + \vec{v} \mid \vec{w}) = (\vec{u} \mid \vec{w}) + (\vec{v} \mid \vec{w})$.
3. **Homogeneidad:** $(\alpha\vec{u} \mid \vec{v}) = \alpha(\vec{u} \mid \vec{v})$.
4. **Positividad:** $(\vec{v} \mid \vec{v}) > 0$ si $\vec{v} \neq \vec{0}$, y $(\vec{0} \mid \vec{0}) = 0$.

Los productos que salen en los exámenes:

- usual en $\mathbb{R}^n$ (producto escalar): $(\vec{u} \mid \vec{v}) = u_1v_1 + \cdots + u_nv_n$;
- ponderado: $(\vec{u} \mid \vec{v}) = c_1u_1v_1 + \cdots + c_nu_nv_n$, con todos los $c_i > 0$;
- en matrices: $(A \mid B) = \operatorname{tr}(A^TB) = \operatorname{tr}(AB^T)$, la suma de los productos entrada por entrada;
- en polinomios, por evaluación: $(p \mid q) = \sum_i p(x_i)\,q(x_i)$ en puntos dados, o por integral: $(p \mid q) = \int_a^b p(x)q(x)\,dx$.

Producto interno complejo. En un espacio vectorial complejo, la simetría se cambia por la *simetría conjugada* $(\vec{u} \mid \vec{v}) = \overline{(\vec{v} \mid \vec{u})}$, y los demás axiomas siguen igual. El producto usual en $\mathbb{C}^n$ es

$$(\vec{u} \mid \vec{v}) = u_1\overline{v_1} + u_2\overline{v_2} + \cdots + u_n\overline{v_n}.$$

Es **lineal en el primer argumento** y **conjugado en el segundo**: $(\alpha\vec{u} \mid \vec{v}) = \alpha(\vec{u} \mid \vec{v})$, pero $(\vec{u} \mid \alpha\vec{v}) = \overline{\alpha}\,(\vec{u} \mid \vec{v})$. Es la convención de los exámenes de la asignatura. Algunos

Ejercicio 4.5.2 · ¿Es producto interno? En un espacio complejo de matrices

Adaptado de: 1er final 2015-1, tipo C, problema 5.

Sea el espacio vectorial complejo $N = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{C} \right\}$. Determine si

$$\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \right) = 2b\overline{y}$$

es un producto interno en N.

Resolución.

1. **Simetría conjugada:** intercambiando los argumentos se obtiene $2y\overline{b}$, y $\overline{2y\overline{b}} = 2\overline{y}b = 2b\overline{y}$. Se cumple.
2. **Aditividad:** con $b_1 + b_2$ en la segunda entrada del primer argumento, $2(b_1 + b_2)\overline{y} = 2b_1\overline{y} + 2b_2\overline{y}$. Se cumple.
3. **Homogeneidad:** $2(\alpha b)\overline{y} = \alpha(2b\overline{y})$. Se cumple.
4. **Positividad:** $(A \mid A) = 2b\overline{b} = 2|b|^2 \geq 0$, pero no depende de a: con $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$, $(A \mid A) = 0$. No se cumple.
5. **Resultado: no** es un producto interno en N; falla la positividad.

Ejercicio 4.5.3 · Producto complejo ponderado y desigualdad del triángulo

Adaptado de: 1er final 2015-1, tipo A, problema 4.

Sea el espacio vectorial complejo $\mathbb{C}^2$ con el producto interno $(\vec{x} \mid \vec{y}) = x_1\overline{y_1} + 4x_2\overline{y_2}$, y sean $\vec{z} = (1, i)$ y $\vec{w} = (i, a)$.

- a) Determine el número a para que $(\vec{z} \mid \vec{w}) = 3i$.
- b) Con ese valor de a, compruebe que $\|\vec{z} + \vec{w}\| \leq \|\vec{z}\| + \|\vec{w}\|$.

Resolución.

1. a) Se conjugan las componentes de $\vec{w}$, el segundo argumento: $(\vec{z} \mid \vec{w}) = 1 \cdot \bar{i} + 4\,i\,\bar{a} = -i + 4i\bar{a}$.
2. $-i + 4i\bar{a} = 3i$ da $4i\bar{a} = 4i$, así que $\bar{a} = 1$ y $a = 1$.
3. b) Con $\vec{w} = (i, 1)$: $\|\vec{z}\|^2 = |1|^2 + 4|i|^2 = 5$ y $\|\vec{w}\|^2 = |i|^2 + 4|1|^2 = 5$.
4. $\vec{z} + \vec{w} = (1 + i,\ 1 + i)$: $\|\vec{z} + \vec{w}\|^2 = |1 + i|^2 + 4|1 + i|^2 = 2 + 8 = 10$.
5. $\|\vec{z} + \vec{w}\| = \sqrt{10} \approx 3.16$ y $\|\vec{z}\| + \|\vec{w}\| = 2\sqrt{5} \approx 4.47$.
6. **Resultado:** a) $a = 1$; b) $\sqrt{10} \leq 2\sqrt{5}$: la desigualdad se cumple.

Ejercicio 4.5.4 · Constante del producto interno a partir de una distancia

Adaptado de: 1er final 2010-2, tipo C, problema 5.

Sea M_2 el espacio vectorial de matrices cuadradas de orden dos con el producto interno real $(A \mid B) = k\ \operatorname{tr}(AB^T)$. Obtenga el valor de k si la distancia entre $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ es igual a 4.

Resolución.

mínima $\|A\vec{x} - \vec{b}\|$ con el producto usual. Hay que distinguir dos vectores: $\hat{x}$ es el vector de **coeficientes** (en el ajuste de una parábola, a, b y c), y $A\hat{x}$ es el vector **ajustado**, que es la proyección de $\vec{b}$ sobre el espacio columna de A y tiene tantas componentes como datos. $\hat{x}$ se obtiene de las *ecuaciones normales*

$$A^T A\,\hat{x} = A^T\vec{b}.$$

4.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«determinar si la función es un producto interno», «indicar los axiomas que no satisface»	revisar los cuatro axiomas	4.3.1
«norma», «distancia», «ángulo», «valor de k para que la distancia sea…»	sustituir en las fórmulas	4.3.2
«base ortogonal», «base ortonormal», «Gram-Schmidt»	ortogonalizar	4.3.3
«complemento ortogonal», «$W^{\perp}$», «vectores ortogonales a…»	$(\vec{v} \mid \vec{w}_i) = 0$ con una base de W	4.3.4
«proyección sobre W», «vector de W más cercano», «más próximo», «mínima distancia», «expresar $\vec{v} = \vec{w} + \vec{w}'$»	teorema de proyección	4.3.5
«mínimos cuadrados», «el polinomio que mejor se ajusta a los datos»	ecuaciones normales	4.3.6
«demostrar» con ortogonales (Pitágoras, conjunto ortogonal)	desarrollar con los axiomas	4.3.7

4.3 Procedimientos

4.3.1 ¿Es un producto interno?

1. Escribe la función con vectores genéricos $\vec{u} = (u_1, \dots)$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ y un escalar α.
2. Revisa los cuatro axiomas en orden: simetría (conjugada, si el espacio es complejo), aditividad, homogeneidad y positividad. Para cada uno escribe «se cumple» con la cuenta, o «no se cumple» con un contraejemplo numérico.
3. **La positividad es la que suele fallar.** Busca un vector no nulo con $(\vec{v} \mid \vec{v}) = 0$ o negativo: si la expresión de $(\vec{v} \mid \vec{v})$ no usa todas las componentes, o es un cuadrado de una suma, $(\vec{v} \mid \vec{v}) = (v_1 + v_2)^2$, hay vectores no nulos que dan cero.
4. Si piden «todos los axiomas que no satisface», revisa los cuatro aunque el primero ya falle.

4.3.2 Norma, distancia y ángulo

1. Usa el producto que da el enunciado, no el usual. En un espacio complejo, conjuga las componentes del segundo vector: $\|\vec{v}\|^2 = \sum c_i |v_i|^2$.
2. Para una distancia, calcula primero $\vec{u} - \vec{v}$ y luego su norma.

3. Si hay una incógnita (k, a), iguala la expresión al dato y despeja; comprueba que el valor deja un producto interno válido (por ejemplo, $k > 0$).

4.3.3 Gram-Schmidt

Dada una base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$:

$$\vec{e}_1 = \vec{v}_1, \qquad \vec{e}_2 = \vec{v}_2 - \frac{(\vec{v}_2 \mid \vec{e}_1)}{(\vec{e}_1 \mid \vec{e}_1)}\vec{e}_1, \qquad \vec{e}_3 = \vec{v}_3 - \frac{(\vec{v}_3 \mid \vec{e}_1)}{(\vec{e}_1 \mid \vec{e}_1)}\vec{e}_1 - \frac{(\vec{v}_3 \mid \vec{e}_2)}{(\vec{e}_2 \mid \vec{e}_2)}\vec{e}_2.$$

1. Calcula los productos con el producto interno del enunciado.
2. Puedes multiplicar cada $\vec{e}_i$ por una constante para quitar fracciones antes de seguir: la ortogonalidad no cambia.
3. Comprueba $(\vec{e}_i \mid \vec{e}_j) = 0$ al terminar.
4. Si piden base ortonormal, divide cada $\vec{e}_i$ entre su norma (con el mismo producto interno).

4.3.4 Complemento ortogonal

1. Obtén una base $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k\}$ de W. Si W está dado por ecuaciones ($x+y-z=0$), primero resuélvelas.
2. Toma un vector genérico $\vec{v}$ de V y plantea $(\vec{v} \mid \vec{w}_1) = 0, \dots, (\vec{v} \mid \vec{w}_k) = 0$, con el producto del enunciado.
3. Resuelve el sistema homogéneo; $W^{\perp}$ son sus soluciones. Comprueba que $\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V$.
4. Atajo en $\mathbb{R}^3$ con el producto usual: si W es el plano $ax + by + cz = 0$, entonces $W^{\perp} = \text{gen}\{(a, b, c)\}$. Con un producto ponderado este atajo **no** vale.

4.3.5 Proyección y vector más cercano

1. Consigue una base **ortogonal** de W (Gram-Schmidt si hace falta).
2. $\vec{p} = \text{proy}_W \vec{v} = \sum \frac{(\vec{v}|\vec{e}_i)}{(\vec{e}_i|\vec{e}_i)}\vec{e}_i$, con $\vec{v}$ en el primer lugar del producto.
3. Comprueba que $\vec{v} - \vec{p}$ es ortogonal a cada $\vec{e}_i$.
4. Si $W^{\perp}$ tiene dimensión 1 (un plano en $\mathbb{R}^3$), es más corto proyectar sobre $W^{\perp} = \text{gen}\{\vec{n}\}$ y restar: $\vec{p} = \vec{v} - \frac{(\vec{v}|\vec{n})}{(\vec{n}|\vec{n})}\vec{n}$.
5. La distancia mínima de $\vec{v}$ a W es $\|\vec{v} - \vec{p}\|$. Para «expresar $\vec{v} = \vec{w} + \vec{w}'$», $\vec{w} = \vec{p}$ y $\vec{w}' = \vec{v} - \vec{p}$.

4.3.6 Mínimos cuadrados

1. Escribe el modelo ($y = ax^2 + bx + c$, $y = mx + b$) y una ecuación por dato: el renglón de A es $(x_i^2,\ x_i,\ 1)$ y la componente de $\vec{b}$ es y_i.
2. Calcula $A^T A$ y $A^T\vec{b}$. Sus entradas son sumas: $\sum x_i^4$, $\sum x_i^3, \dots$, $\sum y_i$.
3. Resuelve las ecuaciones normales $A^T A\,\hat{x} = A^T\vec{b}$.
4. Comprueba: el vector de residuos $\vec{b} - A\hat{x}$ es ortogonal a cada columna de A.

4.3.7 Demostraciones con ortogonalidad

1. Desarrolla el producto interno con los axiomas: $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v} \mid \vec{u} + \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 + (\vec{u} \mid \vec{v}) + (\vec{v} \mid \vec{u}) + \|\vec{v}\|^2$.
2. Usa la hipótesis ($(\vec{u} \mid \vec{v}) = 0$; en un espacio complejo también $(\vec{v} \mid \vec{u}) = \overline{0} = 0$).